تكامل تجزئة مهم!

١ احدا لمجزء الخاصة ؟؟ ١

Subject:

تعميم: اذا كان $a < c_1 < c_2 < \dots < c_m < b$

وكانت التكاملات الاتية $\int_a^{c_1} f(x)\,dg(x), \dots, \int_{c_m}^{b} f(x)\,dg(x)$

موجودة وكانت احدى الدالتين $f(x)$ او $g(x)$ متصلة في النقاط c_i ، $i=1,2,\dots,m$
والاخرى محدودة في جوار c_i عندئذ يكون التكامل

$\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود كالاتي

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x) \quad ; \; c_0 = a, \; c_{m+1} = b$$

* ملاحظة:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = -\int_b^a f(x)\,dg(x)$$

$$\int_a^a f(x)\,dg(x) = 0$$

* وجود تكامل ستيلجس، تعريف: لتكن $g(x)$ دالة تزايدية على المجال المغلق $[a,b]$ عندئذ

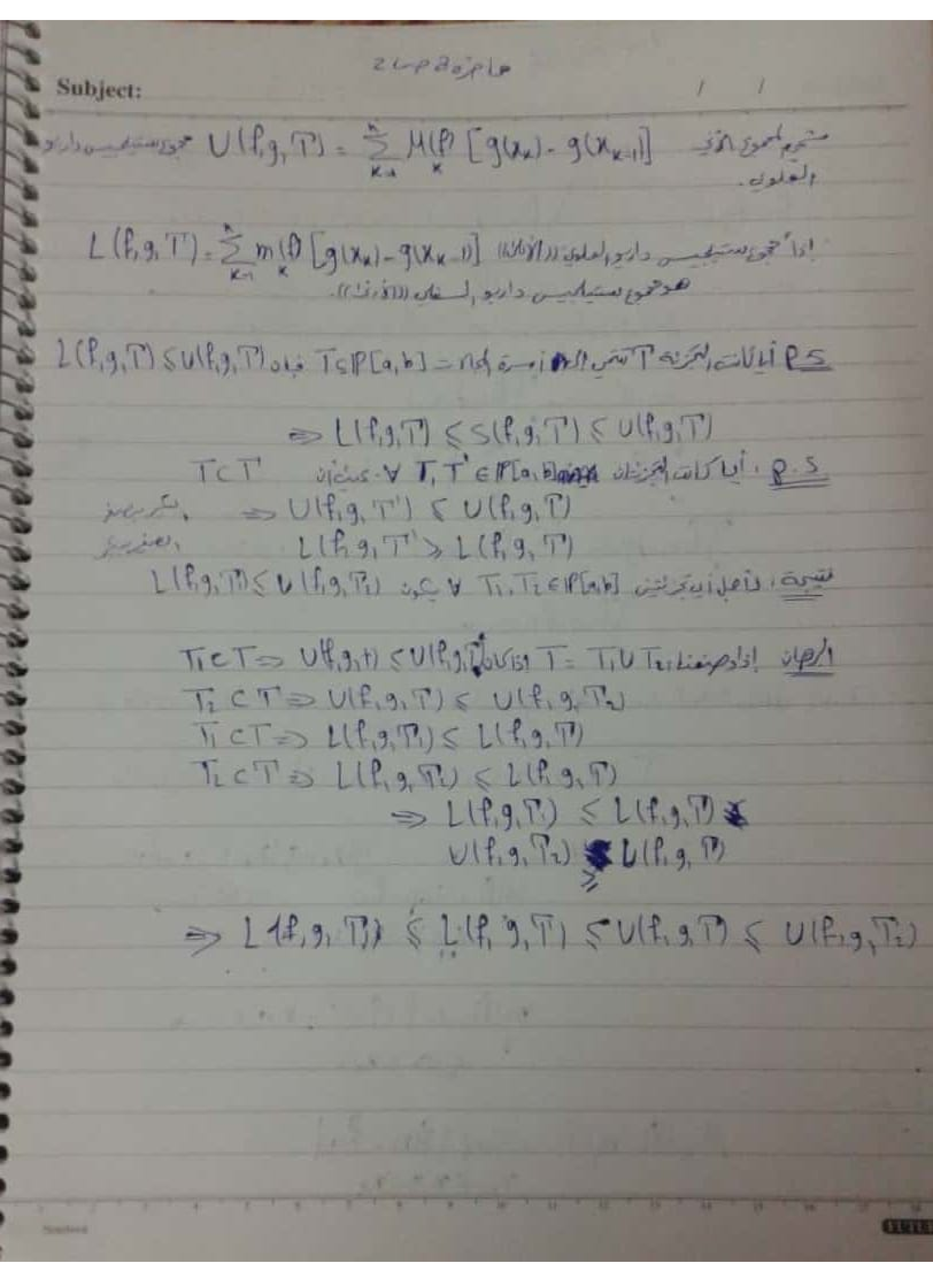
من اجل اي تجزئة T ، $T = [a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b]$

يكون $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geq 0$ ، $\forall\, i = 0,1,2,\dots,n$

نعرف
$$M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad ; \; k = 1,\dots,n$$

$$m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad ; \; k = 1,2,\dots,n$$

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x, y \leq x_k} |f(x) - f(y)|$$



محاضرة 2

Subject: / /

مجموع ستيلتجس داربو $U(f,g,T) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ يسمى المجموع الأعلى العلوي.

$L(f,g,T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ إذاً مجموع ستيلتجس داربو العلوي ((الأعلى)) هو مجموع ستيلتجس داربو السفلي ((الأدنى)).

<u>P.S</u> أياً كانت التجزئة T تنتمي الى أسرة كل $T \in P[a,b]$ فإن $L(f,g,T) \leq U(f,g,T)$

$$\Rightarrow L(f,g,T) \leq S(f,g,T) \leq U(f,g,T)$$

<u>P.S</u> أياً كانت التجزئتان $\forall\, T, T' \in P[a,b]$ حيث أن $T \subset T'$

تكبير $\Rightarrow U(f,g,T') \leq U(f,g,T)$

تصغير $L(f,g,T') \geq L(f,g,T)$

<u>نتيجة</u>: تكامل أي تجزئتين $\forall\, T_1, T_2 \in P[a,b]$ يكون $L(f,g,T_1) \leq U(f,g,T_2)$

<u>البرهان</u>: إذا وضعنا $T = T_1 \cup T_2$ فإن $T_1 \subset T \Rightarrow U(f,g,T) \leq U(f,g,T_1)$

$T_2 \subset T \Rightarrow U(f,g,T) \leq U(f,g,T_2)$

$T_1 \subset T \Rightarrow L(f,g,T_1) \leq L(f,g,T)$

$T_2 \subset T \Rightarrow L(f,g,T_2) \leq L(f,g,T)$

$\Rightarrow L(f,g,T_1) \leq L(f,g,T)$

$U(f,g,T_2) \geq L(f,g,T)$

$$\Rightarrow L(f,g,T_1) \leq L(f,g,T) \leq U(f,g,T) \leq U(f,g,T_2)$$

[illegible]

Subject:

تعريف: نسمي العددين الآتيين I_l , I_u تكامل ستيلتجس العلوي والسفلي على الترتيب

تكامل ستيلتجس العلوي ... [illegible]

$$I_u = \inf_{T \in P[a,b]} U(f,g,T)$$

$$I_l = \sup_{T \in P[a,b]} L(f,g,T)$$

« للدالة f بالنسبة للدالة g متزايدة »

مبرهنة: دوماً لدينا

$$\forall T \in P[a,b] : L(f,g,T) \le I_l \le I_u \le U(f,g,T)$$

وبذلك يكون لدينا

$$\forall T \in P[a,b] : U(f,g,T) - L(f,g,T) \ge 0$$

مبرهنة ①: لتكن $g(x)$ دالة متزايدة على المجال المغلق $[a,b]$ فتتكافأ العبارات الآتية:

[1] $I = \int_a^b f(x)\, d(g(x))$ موجود

[2] $\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \forall \lambda(T) < \delta$: $0 \le [U(f,g,T) - L(f,g,T)] < \varepsilon$

[3] $I_u = I_l$

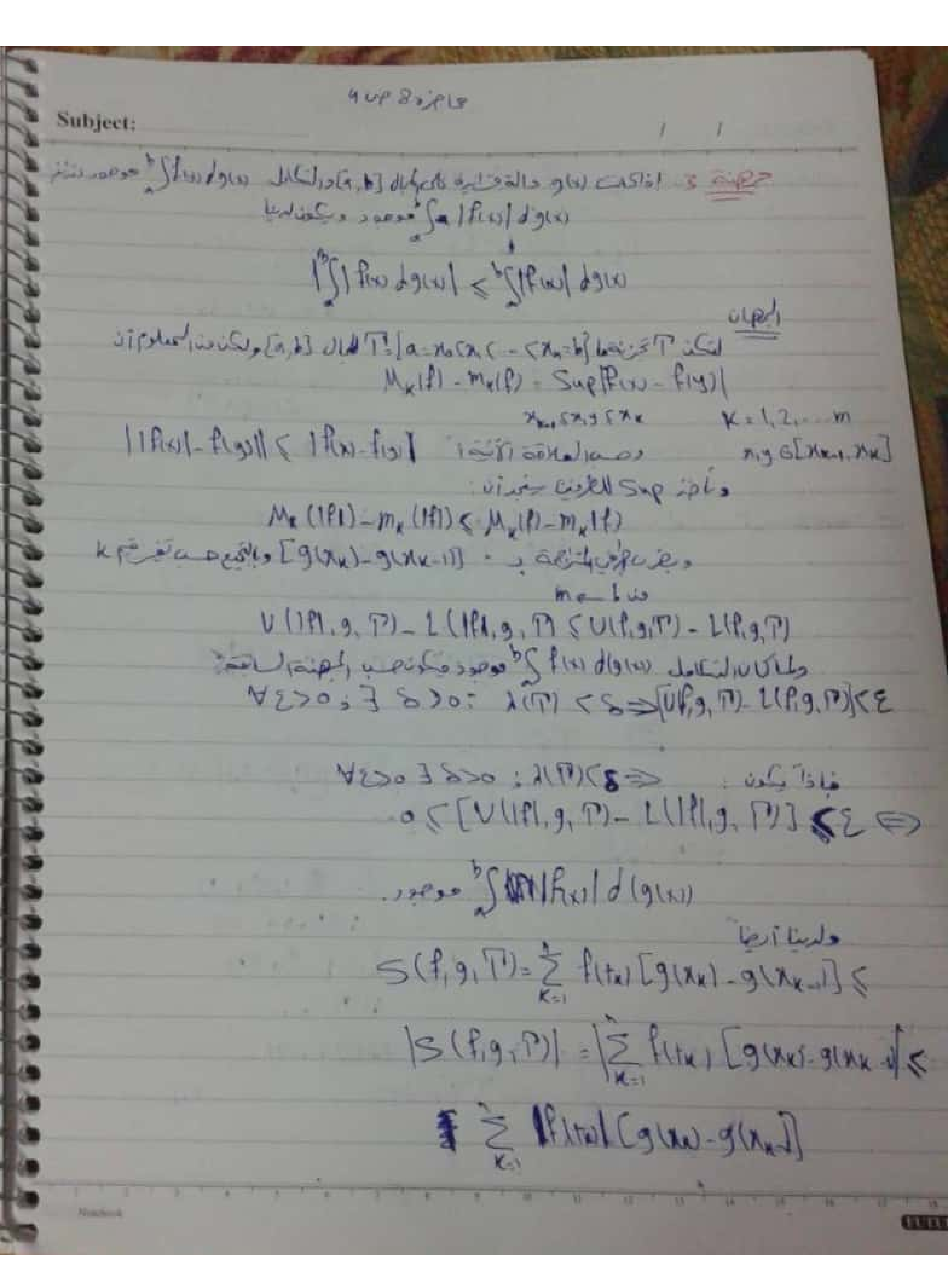
P.S: إن الشرط [2] في المبرهنة السابقة يكافئ قولنا إن النهاية

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} [U(f,g,T) - L(f,g,T)] = 0$$

$$\Rightarrow I_u = \lim_{\lambda(T) \to 0} U(f,g,T)$$

$$I_l = \lim_{\lambda(T) \to 0} L(f,g,T)$$

مبرهنة 2: إذا كانت الدالة g متزايدة على المجال $[a,b]$ وكان التكامل $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ موجوداً فإن $\int_a^b f^2(x)\, dg(x)$ موجود



Subject: / /

مبرهنة 3: إذا كانت $g(x)$ دالة غير متناقصة على الفترة $[a,b]$ وكان التكامل $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجوداً فإن التكامل $\int_a^b |f(x)|\,dg(x)$ موجود ويتحقق أن

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dg(x)$$

البرهان

لتكن T تجزئة ما $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ للفترة $[a,b]$، ولنفرض أن

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup|f(x) - f(y)|$$

$$x_{k-1} \leq x, y \leq x_k \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

$x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ وحسب المتراجحة الآتية $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)|$

وبأخذ sup للطرفين نجد أن

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f)$$

وبضرب طرفي المتراجحة بـ $[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ وبالجمع على k من 1 إلى m

$$U(|f|, g, T) - L(|f|, g, T) \leq U(f, g, T) - L(f, g, T)$$

وبما أن التكامل $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود فيكون حسب المبرهنة السابقة

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow [U(f,g,T) - L(f,g,T)] < \varepsilon$$

فإذاً يكون: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow$

$$0 \leq [U(|f|, g, T) - L(|f|, g, T)] \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$\int_a^b |f(x)|\,d(g(x))$ موجود.

ولدينا أيضاً

$$S(f, g, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \leq$$

$$|S(f, g, T)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)|[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

محاضرة 2 ص 5

Subject:

أيضاً رهانه العزم، عندما نأخذ القيمة المطلقة:

$$\left|\int_a^b f(x)\, d(g(x))\right| \le \int_a^b |f(x)|\, d(g(x))$$

نظرية: إذا كانت $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ فإن التكامل $\int_a^b f(x)\, d(g(x))$ موجود.

البرهان: نفرض أن $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ فهي بالتالي مستمرة بانتظام (وبفرض أن $g(x)$ متزايدة) أي:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |x' - x''| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad ; x', x'' \in [a,b]$$

$$g(a) < g(b)$$

ولتكن P تجزئة ما اختيارية للمجال $[a,b]$ بأطوال جزئية:

$$\forall P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$; \lambda(P) < \delta$$

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

$$\Rightarrow U(f,g,P) - L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)][g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ التكامل $\int_a^b f(x)\, d(g(x))$ موجود.

② نفرض أن الدالة $g(x)$ محدودة التغير على $[a,b]$ وهذا يعني

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x) \qquad ; x \in [a,b]$$

g_1, g_2 دالتان متزايدتان على المجال $[a,b]$.

وبناءً على نتيجة التكاملين $\int_a^b f(x)\, dg_1(x)$ موجود حسب ①

$\int_a^b f(x)\, dg_2(x)$ موجود

$$\int_a^b f(x)\, d[g_1(x) - g_2(x)] = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) - \int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

Subject: / /

مبرهنة: اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز

$$g(x') - g(x'') \le M(x' - x'') \; ; \; x', x'' \in [a,b]$$

فالتكامل $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ يكون موجود

نتيجة: اذا كانت $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تحقق الشرط الآتي
$|g(x') - g(x'')| \le M|x' - x''| : a \le x'' < x' \le b$ عندئذ يكون التكامل
$\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود.

البرهان: لما كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ والدالة $g(x)$ محدودة التغير كونها تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ فيكون حسب المبرهنة السابقة
$\int_a^b f(x)\,d(g(x))$ موجود.

مبرهنة: اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ و g تكتب بالشكل الآتي

$$g(x) = C + \int_a^x \psi(t)\,dt \; ; \; x \in [a,b]$$

وبفرض أن $\int_a^b |\psi(t)|\,dt$ موجود فإنه $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود.

مسائل حول تكامل ستيلجس